



PAUTA CONTROL 1

6 de Septiembre de 2006

Problema 1

1. Notar que el proceso $N_i(t)$ de llegada de clientes que demandan una entrada para la fila i puede ser visto como un Poisson, filtrado por la respectiva probabilidad p_i . Luego:

$$P_{k,i} = P(N_i(t_P + t_N) = k) = \frac{e^{-m(0,t_P+t_N)} m(0,t_P+t_N)^k}{k!},$$

donde $m(0, t_P + t_N) = p_i(\int_0^{t_P} (\lambda + bt)dt + \int_{t_P}^{t_P+t_N} \lambda dt) = p_i(\lambda t_P + b \frac{t_P^2}{2} + \lambda t_N)$

Luego, la probabilidad Q_i de que la fila i sea problemática es:

$$Q_i = \sum_{k=0}^{[0,9C_i]-1} P_{k,i} + \sum_{k=C_i+\alpha_i}^{\infty} P_{k,i}$$

Sea X_i la v.a. que toma el valor 1 si la fila i es problemática y cero en caso contrario. Es claro que:

$$E(NF) = E\left(\sum_{i=1}^M X_i\right) = \sum_{i=1}^M E(X_i) = \sum_{i=1}^M Q_i$$

Alternativamente, se puede utilizar directamente la definición de la esperanza para obtener la siguiente expresión:

$$E(NF) = \sum_{n=1}^M n \sum_{j=1}^{\binom{M}{n}} \left(\prod_{i \in A_{j,n}} Q_i \right) \left(\prod_{i \in A_{j,n}^C} (1 - Q_i) \right)$$

donde: $A_{j,n} \subseteq \{1, 2, \dots, M\}$; $A_{j_1,n} \cap A_{j_2,n} = \emptyset \quad \forall j_1 \neq j_2$; $|A_{j,n}| = n$; $A_{j,n}^C = \{1, 2, \dots, M\} \setminus A_{j,n}$

2. Definimos un ciclo desde que comienza un show hasta que comienza el siguiente.

Notar que la dinámica de atención del cajero puede ser interpretada como un proceso de renovación alternante (tipo ON-OFF), en que ON denota cuando el cajero está atendiendo y OFF cuando no. Luego, para un cliente que llega al teatro la probabilidad de encontrar al cajero atendiendo es:

$$P[\text{Encontrar al cajero atendiendo}] = \lim_{t \rightarrow \infty} P[\text{On en } t] = \frac{E[\text{Tiempo ON}]}{E[\text{Tiempo ON}] + E[\text{Tiempo OFF}]} = \frac{\mu}{\mu + r}$$

La utilidad esperada en un ciclo es entonces:

$$E(Ut) = \frac{\mu}{\mu + r} \left(\sum_{i=1}^M \lambda p_i T S_i \right) - \frac{r}{\mu + r} \lambda T K_{img} - WT - K_{op} T^2 + K_{sub}$$

La duración de un ciclo es T . Luego la utilidad esperada en el largo plazo por unidad de tiempo, como función de T , viene dada por:

$$H(T) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{E[\text{Utilidad en un ciclo}]}{E[\text{Largo de un ciclo}]} = \frac{\mu}{\mu + r} \left(\sum_{i=1}^M \lambda p_i S_i \right) - \frac{r}{\mu + r} \lambda K_{img} - W - K_{op} T + \frac{K_{sub}}{T}$$

Lo anterior es suficiente para efectos de corrección.

Es claro ver que $H(T)$ no tiene máximo. Cuando T tiende a cero, $H(T)$ diverge a infinito.

Intuitivamente, que $H(T)$ diverja es muy razonable, debido a la existencia de la subvención K_{sub} por cada show realizado y a la inexistencia de costos fijos.

3. a) El proceso de conteo del número de veces que *Panorámicos* califica con nota 5 al teatro puede ser visto como un proceso de renovación (los tiempos entre eventos son variables iid). Para un proceso de renovación sabemos que $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \infty$ con probabilidad 1. Esto y además la condición $q_5 > 0$ justifican que el amigo tiene la razón.
- b) Sean R_i la calificación de la revista al i -ésimo show y $N = \text{Min}\{i : R_i = 5\}$.

Para $k \geq 1$, el puntaje acumulado hasta (inmediatamente después) que el teatro pasa a ser *Premium*(k) puede ser escrito como:

$$\text{Puntaje}_k = 2k \sum_{i=1}^N R_i$$

N es un tiempo de parada relativo a los R_i , pues el evento $\{N = n\}$ es independiente de $R_i \quad \forall i > n$. Además, $E(R_i) < \infty$ (directo de que las calificaciones posibles son un conjunto finito de enteros) y $E(N) < \infty$ si $q_5 > 0$ (N es una geométrica de parámetro q_5). Luego, podemos utilizar la ecuación de Wald para calcular la sumatoria en la expresión anterior y se obtiene lo pedido:

$$E(\text{Puntaje}_k) = 2k \cdot E(N) \cdot E(R) = \frac{2k \sum_{j=1}^5 j q_j}{q_5}$$

- c) Sea $N_5(t)$ el proceso que cuenta el número de veces que *Panorámicos* ha calificado con nota 5 al teatro hasta el instante t . Lo que se pide entonces es $E(K_t/N_5(t_0) < 2)$.

$$E(K_t/N_5(t_0) < 2) = E(K_t/N_5(t_0) = 0)P(N_5(t_0) = 0/N_5(t_0) < 2) + E(K_t/N_5(t_0) = 1)P(N_5(t_0) = 1/N_5(t_0) < 2)$$

Notar que $N_5(t)$ es un proceso de Poisson de tasa βq_5 . Luego:

$$P(N_5(t_0) = 0/N_5(t_0) < 2) = \frac{P(N_5(t_0) = 0 \cap N_5(t_0) < 2)}{P(N_5(t_0) < 2)} = \frac{P(N_5(t_0) = 0)}{P(N_5(t_0) < 2)} = \frac{e^{-\beta q_5 t_0}}{e^{-\beta q_5 t_0} + \beta q_5 t_0 e^{-\beta q_5 t_0}}$$

Análogamente,

$$P(N_5(t_0) = 1/N_5(t_0) < 2) = \frac{\beta q_5 t_0 e^{-\beta q_5 t_0}}{e^{-\beta q_5 t_0} + \beta q_5 t_0 e^{-\beta q_5 t_0}}$$

Para calcular los términos que faltan, notar que por la propiedad de incrementos estacionarios, se cumple que $P(N_5(t) - N_5(t_0) = n) = P(N_5(t - t_0) = n) = \frac{(\beta q_5(t - t_0))^n e^{-\beta q_5(t - t_0)}}{n!}$. Luego:

$$E(K_t/N_5(t_0) = 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=2k}^{2k+1} \frac{(\beta q_5(t - t_0))^n e^{-\beta q_5(t - t_0)}}{n!}$$

$$E(K_t/N_5(t_0) = 1) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=2k-1}^{2k} \frac{(\beta q_5(t - t_0))^n e^{-\beta q_5(t - t_0)}}{n!}$$

La respuesta final es entonces:

$$E(K_t/N_5(t_0) < 2) = \frac{e^{-\beta q_5 t_0}}{e^{-\beta q_5 t_0} + \beta q_5 t_0 e^{-\beta q_5 t_0}} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=2k}^{2k+1} \frac{(\beta q_5(t - t_0))^n e^{-\beta q_5(t - t_0)}}{n!}$$

$$+ \frac{\beta q_5 t_0 e^{-\beta q_5 t_0}}{e^{-\beta q_5 t_0} + \beta q_5 t_0 e^{-\beta q_5 t_0}} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=2k-1}^{2k} \frac{(\beta q_5(t - t_0))^n e^{-\beta q_5(t - t_0)}}{n!}$$

Problema 2

1. Para esta parte se puede utilizar el resultado conocido:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{t} \sum_{i=0}^t R_i \right] = \frac{E[R_t]}{E[X_t]}$$

Es necesario destacar, sin embargo, que sólo interesa conocer el numerador, ya que se debe resolver la ecuación:

$$\frac{E[R_t]}{E[X_t]} = 0 \iff E[R_t] = 0$$

Definiendo un ciclo como el período que transcurre entre que un grupo comienza su recorrido y el siguiente grupo lo finaliza (*i.e.* desde que comienza a juntarse gente para un grupo hasta que ese grupo termina el recorrido).

Pese a que no es necesario para esta parte (pero será de ayuda para calcular la utilidad esperada del ciclo), y como la llegada del i -ésimo visitante se distribuye exponencial de tasa λ_i [*visitantes/hora*]:

$$\begin{aligned} E[X_t] &= E[\text{Tiempo total de espera}] + E[\text{Duración del tour}] \\ &= \sum_{i=0}^{V-1} E[\text{Tiempo que demora en llegar la } i\text{-ésima persona}] + \frac{\tau}{\tau - 1} \\ &= \sum_{i=0}^{V-1} \frac{1}{\lambda_i} + \frac{\tau}{\tau - 1} \\ &= \sum_{i=0}^{V-1} \tau^{i+1} + \frac{\tau}{\tau - 1} \\ &= \frac{\tau^{V+1} - \tau}{\tau - 1} + \frac{\tau}{\tau - 1} \\ &= \frac{\tau^{V+1}}{\tau - 1} \end{aligned}$$

Mientras que:

$$\begin{aligned} E[R_t] &= E[\text{Ingreso por entradas}] - G \cdot E[\text{Tiempo de guía con clientes}] \\ &= E_0 \cdot V - G(E[\text{Ciclo}] - E[\text{Tiempo hasta que llega el 1 visitante}]) \\ &= E_0 \cdot V - G \left(\frac{\tau^{V+1}}{\tau - 1} - \frac{1}{\lambda_0} \right) \\ &= E_0 \cdot V - G \left(\frac{\tau^{V+1}}{\tau - 1} - \tau \right) \end{aligned}$$

Luego:

$$E[R_t] = 0 \implies E_0 = \frac{G}{V} \left(\frac{\tau^{V+1}}{\tau - 1} - \tau \right)$$

2. Para que el cuadro sea robado durante la visita de un grupo cualquiera, en ese grupo deben haber más de L vándalos con malas intenciones, como un visitante es vándalo con malas intenciones con probabilidad $p_v \cdot q$ y en cada grupo hay exactamente V visitantes, la cantidad de vándalos con malas intenciones en un grupo se distribuye $B(p_v \cdot q, V)$, por lo que la probabilidad pedida es:

$$P_{ROBO} = \sum_{i=L+1}^V \binom{V}{i} (p_v \cdot q)^i (1 - p_v \cdot q)^{V-i}$$

3. Asumiendo que $p_v > 0$ y $q > 0$, es claro que $P_{ROBO} > 0$ por lo que eventualmente el cuadro va a ser robado y el museo deberá pagar con seguridad (en algún momento) los $N[\$]$ que cuesta la pintura. Los ingresos que representan para el museo las visitas guiadas durante la exhibición del cuadro dependen del momento del robo, por lo que definiendo las siguientes v.a.:

$$\begin{aligned} A_n &= \begin{cases} 1 & \text{El } n\text{-ésimo grupo roba la pintura} \\ 0 & \sim \end{cases} \\ N &= \inf\{n \mid A_n = 1\} \\ \$G_n &= \text{Utilidad producida por el } n\text{-ésimo grupo} \end{aligned}$$

El valor pedido se puede expresar como:

$$E[\text{Utilidad Pintura}] = E\left[\sum_{i=1}^N \$G_n\right] - N$$

Como el evento $N = n$ es independiente de $A_j \forall j > n$, N es un tiempo de parada para A_n luego, también lo es para la v.a. $\$G_n$. Además es claro que $E[N] > \infty$ (más adelante se calculará $E[N]$ y se comprobará esta afirmación, cosa previsible al ser $P_{ROBO} \neq 0$).

Así, utilizando la ecuación de Wald:

$$E\left[\sum_{i=1}^N \$G_n\right] = E[N] \cdot E[\$G_n]$$

y

$$E[\text{Utilidad Pintura}] = E[N] \cdot E[\$G_n] - N$$

Utilizando la parte 1 es fácil ver que:

$$E[\$G_n] = E \cdot V - G\left(\frac{\tau^{V+1}}{\tau-1} - \tau\right) \quad \forall n > 0$$

Utilizando la parte 2:

$$P[N = j] = (1 - P_{ROBO})^{j-1} P_{ROBO}$$

Luego:

$$E[N] = \sum_{j=1}^{\infty} j(1 - P_{ROBO})^{j-1} P_{ROBO} = \frac{1}{P_{ROBO}} < \infty$$

De esta forma, habiendo ya calculado todos los términos:

$$E[\text{Utilidad Pintura}] = \frac{E \cdot V - G\left(\frac{\tau^{V+1}}{\tau-1} - \tau\right)}{P_{ROBO}} - N$$

4. En esta parte lo que se pide es calcular $E[\text{Intentos hasta } ABCBACCABCB A]$ y compararlo con M , para comprobar así si la suposición del detective es o no correcta. Utilizando el teorema de Blackwell para el caso lattice ($d = 1$):

$$\begin{aligned} E[\text{Intentos hasta } ABCBACCABCB A] &= E[\text{Intentos hasta } ABCBA] + E[\text{Intentos entre } ABCBACCABCB A] \\ &= E[\text{Intentos hasta } ABCBA] + \frac{1}{p_a^4 p_b^4 p_c^4} \\ &= E[\text{Intentos hasta } A] + E[\text{Intentos entre } ABCBA] + \frac{1}{p_a^4 p_b^4 p_c^4} \\ &= E[\text{Intentos hasta } A] + \frac{1}{p_a^2 p_b^2 p_c} + \frac{1}{p_a^4 p_b^4 p_c^4} \\ &= E[\text{Intentos entre } A] + \frac{1}{p_a^2 p_b^2 p_c} + \frac{1}{p_a^4 p_b^4 p_c^4} \\ &= \frac{1}{p_a} + \frac{1}{p_a^2 p_b^2 p_c} + \frac{1}{p_a^4 p_b^4 p_c^4} \end{aligned}$$

Como $p_i \in (0, 1) \forall i \in \{A, B, C\}$ es fácil ver que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_a^4 p_b^4 p_c^4} &= \frac{1}{p_a p_b p_c} \cdot \left(\frac{1}{p_a p_b p_c} \right)^3 > \frac{1}{p_a p_b p_c} \\ \frac{1}{p_a^2 p_b^2 p_c} &= \frac{1}{p_a p_b p_c} \cdot \frac{1}{p_a p_b} > \frac{1}{p_a p_b p_c} \\ \frac{1}{p_a} &> 0 \end{aligned}$$

Por lo que:

$$E[\text{Intentos hasta } ABCBACCABCBA] = \frac{1}{p_a} + \frac{1}{p_a^2 p_b^2 p_c} + \frac{1}{p_a^4 p_b^4 p_c^4} > \frac{2}{p_a p_b p_c} > M$$

Se ha comprobado de esta forma que la suposición del detective es incorrecta.

5. Bajo este nuevo sistema el máximo tiempo de espera posible es H . Como este valor debe ser menor que el tiempo esperado de espera bajo el sistema antiguo (esperar hasta que se acumulen V visitantes), la cota para H es:

$$H < E[\text{Tiempo de espera sistema } V \text{ personas}] \equiv E[T_V]$$

Ahora se debe calcular esta cota en función de los parámetros del problema, condicionando en el número de personas que están esperando cuando llega un visitante cualquiera:

$$E[T_V] = \sum_{i=0}^{V-1} E[T_V \mid i \text{ personas esperando}] P[i \text{ personas esperando}]$$

Para el cálculo de la esperanza del tiempo de espera condicional en que han llegado i visitantes, basta considerar el tiempo esperado de llegada de los $V - i - 1$ visitantes que faltan. Así, similar al cálculo de la parte 1:

$$E[T_V \mid i \text{ personas esperando}] = \sum_{j=i+1}^{V-1} \frac{1}{\lambda_j} = \sum_{j=i+1}^{V-1} \tau^{j+1} = \frac{\tau^{V+1} - \tau^{i+1}}{\tau - 1}$$

Para calcular la probabilidad de que hayan exactamente i visitantes esperando cuando llegue un visitante cualquiera (en el largo plazo), se define el siguiente proceso de renovación alternante:

- ON** : Hay exactamente i personas esperando.
- OFF** : El resto del tiempo.

De esta forma,

$$P[i \text{ personas esperando}] = P[\text{Encontrar el sistema en ON}]$$

Además,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P[\text{Encontrar el sistema en ON en } t] = \frac{E[\text{Tiempo en ON}]}{E[\text{Tiempo en ON}] + E[\text{Tiempo en OFF}]}$$

$$E[\text{Tiempo en ON}] = \frac{1}{\lambda_i} = \tau^{i+1}$$

De la parte 1:

$$E[\text{Tiempo en ON}] + E[\text{Tiempo en OFF}] = \sum_{k=0}^{V-1} \frac{1}{\lambda_k} = \frac{\tau^{V+1} - \tau}{\tau - 1}$$

Así,

$$P[i \text{ personas esperando}] = \frac{\tau^{i+1}(\tau - 1)}{\tau^{V+1} - \tau}$$

La cota para H es, entonces:

$$H < \sum_{i=0}^{V-1} \frac{\tau^{V+1} - \tau^{i+2}}{\tau - 1} \cdot \frac{\tau^{i+1}(\tau - 1)}{\tau^{V+1} - \tau} = \sum_{i=0}^{V-1} \frac{\tau^{V+1} - \tau^{i+2}}{\tau^{V+1} - \tau} \cdot \tau^{i+1}$$

6. Para este cálculo, se procede de forma análoga a la parte 1, así:

$$E[U] \equiv E[\text{Utilidad por unidad de tiempo}] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{t=0}^{\infty} U_t = \frac{E[U_t]}{E[X_t]}$$

Definiendo un ciclo como el período entre 2 salidas consecutivas, es claro que:

$$E[X_t] = H \quad \forall t$$

Condicionando en el número de visitantes que llegan para un tour:

$$E[U_t] = \sum_{j=0}^{\infty} E[U_t \mid \text{llegaron } j \text{ personas}] P[\text{llegaron } j \text{ personas}]$$

Como la llegada de visitantes es un proceso de poisson homogéneo de tasa $\lambda[\text{personas/hora}]$:

$$P[\text{llegaron } j \text{ personas}] = \frac{e^{-\lambda H} (\lambda H)^j}{j!}$$

Para calcular el ingreso condicional en el número de visitantes que llegaron al tour, se condiciona nuevamente, ahora en la cantidad de personas que esperan más de $H/3[\text{horas}]$:

$$E[U_t \mid \text{llegaron } j \text{ personas}] = \sum_{k=0}^j E[U_t \mid k \text{ esperan más de } H/3 \mid j] P[k \text{ esperan más de } H/3 \mid j]$$

Como la distribución de cada tiempo de llegada condicional en que han llegado j personas es $U(0, H)$. Para un visitante, la probabilidad de esperar más de $H/3[\text{horas}]$ es la de haber llegado antes de $2H/3[\text{horas}]$ después de la salida del último grupo, es decir:

$$P[\text{Una persona espere más de } H/3 \mid j] = \int_0^{\frac{2H}{3}} \frac{dz}{H} = \frac{2}{3}$$

Así,

$$P_{k|j} \equiv P[k \text{ esperan más de } H/3 \mid j] = \binom{j}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{j-k} = \binom{j}{k} \frac{2^k}{3^j}$$

La utilidad, condicional en que llegaron j visitantes y k de ellos esperaron más de $H/3[\text{horas}]$ es:

$$E[U_t \mid k \text{ esperan más de } H/3 \mid j] = 0,9 \left[k \left(R + E \left[\frac{s}{H} \mid s > \frac{H}{3} \right] \cdot S \right) + (j - k)(p_g \cdot GO) \right] + j \cdot E - H \cdot (2SG + SC)$$

Falta calcular:

$$E \left[\frac{s}{H} \mid s > \frac{H}{3} \right] = \frac{E[s \mid s > \frac{H}{3}]}{H} = \frac{\frac{2H}{3}}{H} = \frac{2}{3}$$

Ya que $s \sim U(0, H)$, por lo que $s \mid_{s > H/3} \sim U(\frac{H}{3}, H)$

Así, el valor pedido es:

$$E[U] = \frac{1}{H} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j \left(0,9 \left[k \left(R + \frac{2S}{3} \right) + (j-k)(p_g \cdot GO) \right] + j \cdot E - H \cdot (2SG + SC) \right) \binom{j}{k} \frac{2^k}{3^j} \cdot \frac{e^{-\lambda H} (\lambda H)^j}{j!}$$

Dudas y/o errores:

Mario Guajardo
mguajard@ing.uchile.cl

Daniel Yung
dyung@ing.uchile.cl